19.01.16

Τοπικά και Ολικά Ακρότατα

$f(\bar{x})$ τοπικό ελάχιστο της f στο U $[U \subset \mathbb{R}^n$ και $f: U \to \mathbb{R}]$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U : f(\bar{y}) \geq f(\bar{x})$.
(αντίστοιχα για γνήσιο τοπικό ελάχιστο $>$)

$f(\bar{x})$ ολικό ελάχιστο $\Leftrightarrow \forall \bar{y} \in U : f(\bar{y}) \geq f(\bar{x})$
(αντίστοιχα για γνήσιο ολικό ελάχιστο $>$)

Το $\bar{x}$ λέγεται σημείο τοπικού ελαχίστου κλπ.

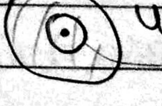
Υπενθύμιση: Αν $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $f: U \to \mathbb{R}$ συνεχής
$\Rightarrow \exists$ ολικό ελάχιστο και μέγιστο της f στο U.

Αναγκαία συνθήκη τοπικού ακροτάτου:

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$. Τότε, αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $\bar{x}$, τότε

$$\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}.$$

Απόδειξη



Μπορώ και βάζω μία μπάλα.

Έστω $\varepsilon > 0$ με $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$.
Οι συναρτήσεις $g_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$

$$g_i(t) := f(\bar{x} + t\bar{e}_i), \ i = 1, \dots, n$$

είναι διαφορίσιμες στο $t = 0$

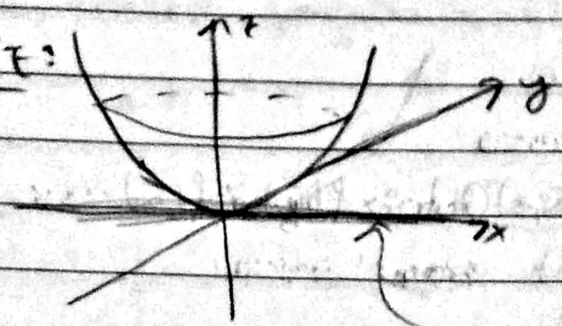
$$\left[g_i'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + (t+h)\bar{e}_i) - f(\bar{x} + t\bar{e}_i)}{h} \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} + t\bar{e}_i) \right]$$

και ισχύει

$$g_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}), \ \forall i = 1, \dots, n$$

Επίσης, η g_i έχει τοπικό ακρότατο στο $t=0$

<u>NOTE</u>:

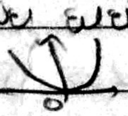


$f(x,y)=x^2+y^2 > f(0,0)=0$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Η g_i είναι συνάρτηση η περιορισμένη εδώ πάνω.

Αφού ισχύει εκεί, η ίδια για x,y



έχει τοπικό και ολικό ελάχιστο στο 0.

ΑΠΟ I: Θ. FERMAT

$$\Longrightarrow \quad g_i'(0)=0, \quad \forall i=1,\dots,n$$

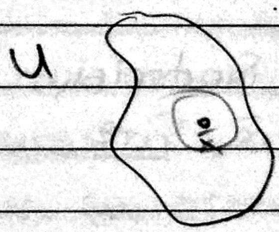
$$\Longrightarrow \quad \nabla f(\bar{x})=\bar{0}$$

<u>NOTE</u>: <u>Έχει ακρότατο η g_i γιατί</u>:

Έστω ότι f έχει τοπικό ελάχιστο στο $\bar{x}$.

Τότε (ορισμός): $\exists \varepsilon>0, \ \forall \bar{y}\in B(\bar{x},\varepsilon) \ f(\bar{y})\geq f(\bar{x})$

Συνεπώς,



$$\Longrightarrow \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon): \underbrace{f(\bar{x}+t\bar{e}_i)}_{=g_i(t)} \geq \underbrace{f(\bar{x})}_{=g_i(0)}$$

<u>NOTE</u>: $B(\bar{x},\varepsilon) = \bar{x} + B(\bar{0},\varepsilon)$

<u>**ΟΡΙΣΜΟΣ**</u> Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: U\to\mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμη. Ένα σημείο $\bar{x}\in U$ με $\nabla f(\bar{x})=\bar{0}$ λέγεται <u>κρίσιμο σημείο</u>

Εδώ παίζουν τα τοπικά ακρότατα

<u>Παρατήρηση</u>: ΠΡΟΣΟΧΗ! Προϋπόθεση για να «δουλέψει» το κριτήριο αυτό, είναι να είναι το U <u>ανοικτό</u> και η f <u>μερικώς διαφορίσιμη</u>

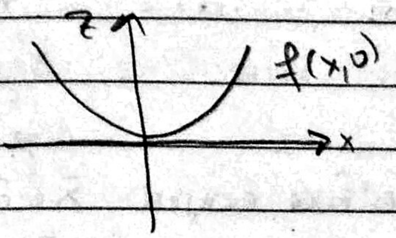
<u>Παρατήρηση</u>: Μπορεί ένα σημείο να είναι κρίσιμο, αλλά όχι σημείο ακροτάτου.

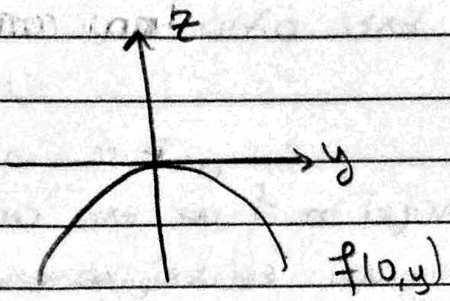
<u>π.χ.</u> $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\to$ ανοικτό

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x, -2y)$ + άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμη

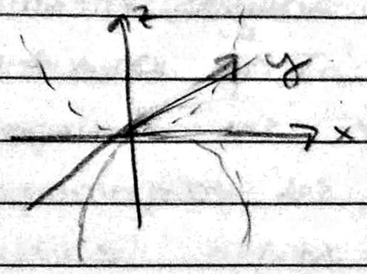
$\Rightarrow$ άρα εφαρμόζεται

$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$





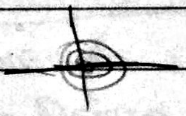
άρα,



(σέλα, σαμάρι)

Έτσι καταλαβαίνουμε ότι δεν είναι ακρότατο το $(0,0)$

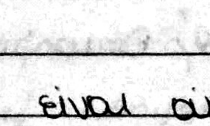
Όμως το $(0,0)$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο αφού $\forall \varepsilon > 0$: $f(\varepsilon,0) > f(0,0) = 0 > f(0,\varepsilon)$



όσο κοντά και να το πάω δεν θ'αλλάξει

(είναι, όπως λέμε, σαγματικό σημείο) $\to$ δηλ. σημείο σέλας

<u>Παρατήρηση</u>: Μπορεί η f να έχει ακρότατο σε ένα σημείο, αλλά να μην είναι μερικώς διαφορίσιμη σε αυτό.



<u>π.χ.</u> $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$

$> 0 = f(\bar{0})$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$

$\Rightarrow$ η f έχει στο $\bar{x} = \bar{0}$ ολικό (και άρα και τοπικό) γνήσιο ελάχιστο.

<u>Ερώτημα</u>: Έχει άλλα ακρότατα (στο $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$);

$$\nabla f(\bar{x}) = \nabla \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x_1}{\sqrt{\dots}}, \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x_2}{\sqrt{\dots}}, \dots, \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x_n}{\sqrt{\dots}} \right)$$

$$= \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) \neq \bar{0}, \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}$$

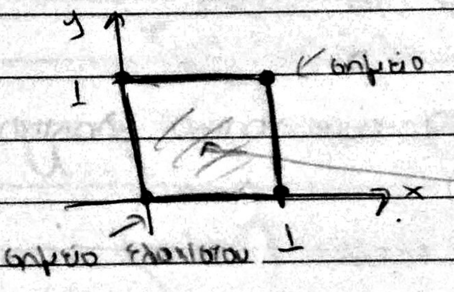
<u>Απάντηση</u>: Δεν έχει άλλα ακρότατα.

αφού δίνει άκρα εκεί σαν να και έχει επέκταση η διαφορίσιμη

<u>Παρατήρηση</u>: Μπορεί η $f: U \to \mathbb{R}$ να έχει ακρότατο σ' ένα σημείο $\bar{x} \in \partial U \subset U$ και το $\bar{x}$ να είναι εσωτερικό σημείο κάποιας επέκτασης της f, η οποία να είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ με κλίση $\neq \bar{0}$

<u>Π.χ.</u> $f: U \to \mathbb{R}$

$U = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = x + y$



Το θεώρημα μπορεί να το εφαρμόσω μόνο στο ανοικτό και όχι στο σύνορο

$\nabla \tilde{f}(x,y)$

$\tilde{f}(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x,y) = x + y$, είναι επέκταση της f στο $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \nabla \tilde{f}(x,y) = (1,1) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ η $f\big|_{\text{int}U} : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ δεν έχει ακρότατα

και έχει $f(0,0) = 0$

$f(1,1) = 2$

και $f(x,y) = x + y \in (0,2) \quad \forall (x,y) \in U \setminus \{(0,0), (1,1)\}$

=> (0,0) , (1,1) σημεία ολικού (γνήσιου) ελαχίστου και μεγίστου αντίστοιχα

Συζητήσαμε για το μέσο, για τα (0,0), (1,1) αλλά όχι για τα υπόλοιπα.
Επίσης, στο σύνορο βλέπουμε

$$f(0,0) \le \underbrace{f(x,0) = x}_{:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ γν. αύξουσα}} \le f(1,0) = 1 \le \underbrace{f(1,y) = 1+y}_{:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ γν. αύξουσα}} \le f(1,1) = 2$$

και αντίστοιχα στο σύνορο από το (0,0) στο (0,1) στο (1,1).

=> Άλλα ακρότατα δεν υπάρχουν

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται
- θετικά ορισμένος <=> $\vec{\eta}^T A \vec{\eta} > 0$, $\forall \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$
- αρνητικά ορισμένος <=> $\vec{\eta}^T A \vec{\eta} < 0$, $\forall \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$
- θετικά ημιορισμένος <=> $\vec{\eta}^T A \vec{\eta} \ge 0$, $\forall \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$
- μη ορισμένος <=> ο A δεν είναι ούτε αρνητικά ούτε θετικά ημιορισμένος
- αρνητικά ημιορισμένος <=> $\vec{\eta}^T A \vec{\eta} \le 0$, $\forall \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ Ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n ιδιοτιμές $\in \mathbb{R}$ και είναι:
- θετικά ορισμένος <=> όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές
- αρνητικά ορισμένος <=> όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές
- θετικά ημιορισμένος <=> " " " " μη-αρνητικές
- αρνητικά ημιορισμένος <=> " " " " μη-θετικές
- μη ορισμένος <=> έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές

Υπάρχει και ένα **ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΥΠΟΟΡΙΖΟΥΣΩΝ** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
Για $n=2$, ειδικότερα:
- θετικά ορισμένος <=> $\det A > 0$ και $a > 0$
- αρνητικά ορισμένος <=> $\det A > 0$ και $a < 0$
- μη ορισμένος <=> $\det A < 0$

Ικανή συνθήκη γνήσιου τοπικού ακρότατου ή σαγματικού σημείου:

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f \in C^2(U)$ [$f: U \to \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη] και $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$. Τότε

(α) $H_f(\bar{x})$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow$ η f έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο.

(β) $H_f(\bar{x})$ αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$ " " " " μέγιστο.

(γ) $H_f(\bar{x})$ μη ορισμένος $\Rightarrow$ (η f έχει στο $\bar{x}$ σαγματικό σημείο)

ή αλλιώς: η f δεν έχει στο $\bar{x}$ τοπικό ακρότατο.

αγνοούμε αυτό, όχι την παρένθεση

Απόδειξη

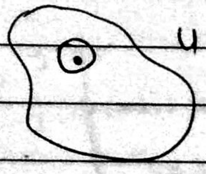
(α) Έστω $A = H_f(\bar{x})$ θετικά ορισμένος

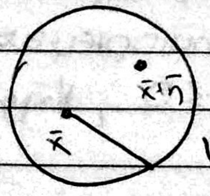
Από Θεώρημα Taylor έχουμε: $f(\bar{x}+\bar{\eta}) = f(\bar{x}) + \underbrace{\nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{\eta}}_{=0} + \frac{1}{2}\bar{\eta}^T A \bar{\eta} + \varphi(\bar{\eta})$ $\to 0$

με $\varphi(\bar{\eta}) = o(\|\bar{\eta}\|^2)$ για $\bar{\eta} \to \bar{0}$

$\overset{ορ.}{\Longleftrightarrow} \lim_{\bar{\eta} \to \bar{0}} \frac{\varphi(\bar{\eta})}{\|\bar{\eta}\|^2} = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \bar{\eta} \in B(\bar{0}, \delta): |\varphi(\bar{\eta})| \leq \varepsilon \|\bar{\eta}\|^2$



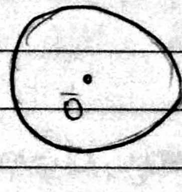


$\|\bar{\eta}\| < \varepsilon$

Σκελετός της απόδειξης: • Μπορούμε ν.δ.ο. $\bar{\eta}^T A \bar{\eta} \geq \alpha \|\bar{\eta}\|^2, \forall \bar{\eta} \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0$

(αν A είναι θετικά ορισμένος)

H/W → (θα το βρείτε στις σημειώσεις)



$\leftarrow \bar{\eta}^T A \bar{\eta} > 0$ εκεί πάνω, άρα συνεχής σε συμπαγές λαμβάνει ελάχιστο.

$\Downarrow$ δηλ. το α είναι το min των $\bar{\eta}^T A \bar{\eta}$ πάνω στον κύκλο

• $\bar{\eta}$ ← εκεί, εδώ: $\bar{\eta} = \left(\frac{\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|}\right)\|\bar{\eta}\|$

$\Downarrow$ πάνω αυτό του ανυσματος

• Επίσης, $\exists \delta > 0 \; |\varphi(\bar{\eta})| \leq \frac{\alpha}{4}\|\bar{\eta}\|^2, \forall \bar{\eta} \in B(\bar{0}, \delta)$

• Από τις δύο πρώτες • (τελείες) και το Θ. Taylor, έχουμε:

$$\overbrace{f(\bar{x}+\bar{\eta}) \geq f(\bar{x}) + \frac{1}{2}a\|\bar{\eta}\|^2}^{\text{από πρώτη}} \overbrace{- |\varphi(\bar{\eta})|}^{\text{από δεύτερη}}$$

$$\geq f(\bar{x}) + \frac{1}{2}a\|\bar{\eta}\|^2 - \frac{1}{4}a\|\bar{\eta}\|^2$$

$$\geq f(\bar{x}) + \frac{a}{4}\|\bar{\eta}\|^2$$

$$\underset{a>0}{\overset{\bar{\eta}\neq\bar{0}}{>}} f(\bar{x}) \quad \forall \bar{\eta}\in B(\bar{0},\delta)$$

$\Rightarrow f(\bar{y}) > f(\bar{x}) \quad \forall \bar{y} \in B(\bar{x},\delta) = \bar{x} + B(\bar{0},\delta)$

Παράδειγμα / Άσκηση: $f(x,y) = x^2+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ → δεν είναι συμπαγές γιατί δεν είναι φραγμένο

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x, 2y)$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ το μοναδικό κρίσιμο σημείο
[αν η f έχει κάποιο ακρότατο, τότε το πολύ στο $(0,0)$, αλλιώς σίγουρα δεν έχει]

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ θετικά ορισμένος } \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow Hf(0,0)$ θετικά ορισμένος
$\Rightarrow (0,0)$ γνήσιο τοπικό ελάχιστο

Αντίστοιχα: $f(x,y) = -x^2-y^2$ έχει το μοναδικό ολικό και τοπικό ακρότατο στο $(0,0)$, το οποίο είναι μέγιστο.

και: $f(x,y) = x^2-y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ μη ορισμένος}$$

από το θεώρημα ξέχνα το ακρότατο!

$\Rightarrow (0,0)$ όχι τοπικό ακρότατο (σαγματικό σημείο)

Παρατήρηση: Εάν ο $Hf(x)$ δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένος ούτε μη-ορισμένος, δεν μπορούμε να πούμε τίποτα.

Παράδειγμα:
$$f_1(x,y) = x^2 + y^4$$
$$f_2(x,y) = x^2$$
$$f_3(x,y) = x^2 + y^3$$
$$f_4(x,y) = x^2 - y^4$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\forall i = 1, \ldots, 4$

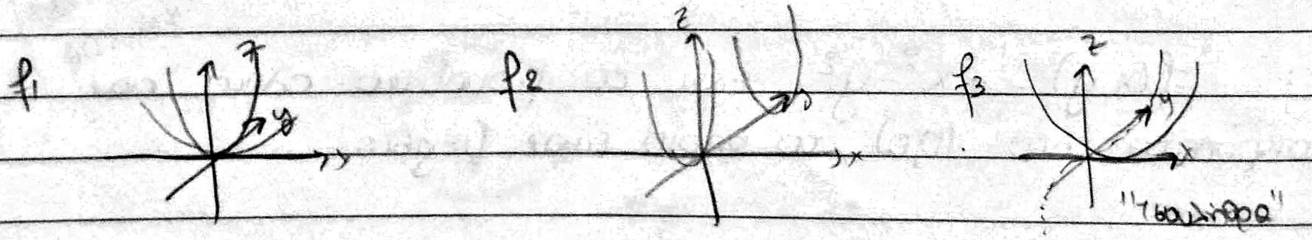
$$\nabla f_1(x,y) = (2x, 4y^3)$$
$$\nabla f_2(x,y) = (2x, 0)$$
$$\nabla f_3(x,y) = (2x, 3y^2)$$
$$\nabla f_4(x,y) = (2x, -4y^3)$$

$\Rightarrow$ Το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για όλες

Για τις f_1, f_3, f_4 είναι το μοναδικό.
Για την f_2 όλα τα $(0,y) \in \mathbb{R}^2$ με $y \in \mathbb{R}$ είναι κρίσιμα σημεία.

$Hf_1(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ θετικά ημιορισμένος (ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$)
$\Downarrow$
άρα δεν μπορώ να πω τίποτα

και f_1 έχει στο $(0,0)$ ολικό γνήσιο ελάχιστο,



και f_2 έχει στο $(0,0)$ μη γνήσιο ολικό ελάχιστο,
και f_3 δεν έχει στο $(0,0)$ τοπικό ακρότατο (γενικευμένο σαγματικό)
και f_4 έχει στο $(0,0)$ σαγματικό σημείο.

H/W: Δείτε τις ασκήσεις των σημειώσεων + επανάληψη τριγωνομετρία